IEVADS ELASTĪBAS TEORIJĀ

Andris Čate un Andris Popovs

Rīgas Tehniskā Universitāte

Materiālu un konstrukciju institūts

Rīga, 2008

Saturs

1. Matemātiskie pamatjēdzieni.

1.1. Tenzori un nepārtrauktas vides mehānika.
(tensors and continuum mechanics)

Nepārtrauktas vides mehānikā apskata fizikālos lielumus, kuri ir neatkarīgi no pielietotās koordināšu sistēmas. Matemātiski šie lielumi tiek pārstāvēti ar tenzoriem.

No matemātiskā viedokļa tenzors ir neatkarīgs no jebkuras koordināšu sistēmas. Tomēr īpašās koordināšu sistēmās atsevišķi lielumi tiek apzīmēti kā komponentes. No tenzoru komponentēm vienā koordināšu sistēmā var noteikt komponentes jebkurā citā sistēmā.

Nepārtrauktas vides fizikālie likumi tiek izteikti ar tenzoru vienādojumiem. Tāpēc ka tenzoru pārveidojumi ir lineāri un homogēni, t.i. vienveidīgi vienādojumi, tie ir derīgi kā vienā tā arī citā koordināšu sistēmā. Šo tenzoru vienādojumu neatkarība (invariance) pie koordināšu transformācijas ir viens no galvenajiem iemesliem tenzoru pielietošanai nepārtrauktas vides mehānikā.

1.2. Galvenais tenzors. *Cartesian* tenzors. Tenzora pakāpe.
(General tensors. Cartesian tensors. Tensor rank)

Rīkojoties ar parastām koordināšu transformācijām starp patvaļīgām līklīniju koordināšu sistēmām, tenzori tiek definēti kā galvenie tenzori (*general tensors*). Kad tiek veikta transformācija no vienas homogēnas, jeb vienveidīgas, koordināšu sistēmas uz citu, tenzors tiek saukts par *Cartesian* tenzoru.

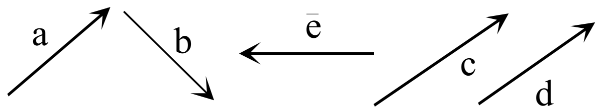
Tenzori tiek klasificēti pēc to pakāpes (*rank or order*) saskaņā ar to pārveidošanas (t.i. transformācijas) likumu izvēlēto formu. Tāda paša klasifikācija parādās arī komponenšu skaitliskos apzīmējumos pie tenzoru apzīmēšanas n–dimensiju telpā. Trīsdimensiju Eiklida telpā kā parastā fizikālā telpā tenzora komponenšu numuri ir 3^N, šeit N ir tenzora pakāpe. Atbilstoši, nulles pakāpes tenzoram trīsdimensiju telpas koordināšu sistēmā ir viena komponente. Nulles pakāpes tenzoru sauc par skalāru (*scalars*). Pirmās pakāpes tenzoram ir trīs komponentes koordināšu sistēmā fizikālā telpā un to sauc par vektoru (*vectors*). Kvantitatīvā īpašība gan pēc lieluma gan virziena tiek attēlota ar vektoru. Otrās pakāpes tenzors atbilst diādei (*dyadics*). Nepārtrauktas vides mehānikas atsevišķi svarīgi lielumi tiek attēloti kā otrās pakāpes tenzori. Vēl augstākas pakāpes tenzorus sauc par triādēm (*triadics*), jeb trešās pakāpes tenzori, un tetraeds (*tetradics*), jeb ceturtās pakāpes tenzors.

1.3. Vektori un skalāri lielumi.

Noteiktos apstākļos fizikālos lielumus, tādus kā spēks un ātrums, kuri gan pēc lieluma gan virziena tiek attēloti trīsdimensiju telpā ar taisnes nogriezni, var saskaitīt pēc paralelograma likuma. Taisnes nogrieznis ar savu garumu un uzrādīto virzienu attēlo pirmās pakāpes tenzoru un tiek saukts par vektoru, kura garums ir proporcionāls vektora lielumam. Līdzīgam vektoram ir tāds pats virziens un līdzīgs garums.

Vienības vektors (*unit vector*) ir vektors, kura garums ir viena garuma vienība. Nulles vektoram (*null or zero vector*) ir nulles garums un nenoteikts virziens. Negatīvam vektoram ir tāds pats garums, bet pretējs virziens.

Tādi fizikāli lielumi kā masa un enerģija, kuru lielumu pārstāv tikai nulles pakāpes tenzori, ir skalāri. Simboliskos, jeb Gibsa apzīmējumos vektori parasti tiek apzīmēti ar “trekniem” burtiem (*bold-faced*), piemēram **a,b** utt. Skalāros lielumus norāda ar *italic letters: a,b* utt.. Vienības vektoru atšķirīgā pazīme ir svītriņa virs “*bold-faced*” burta. Zīm.1.1 parādīti vektori **a** un **b** ar vienības vektoru $\bar{e}$ un divi līdzīgi vektori **c** un **d**. Vektora **a** lielums tiek rakstīts kā a , vai arī, ja grib sevišķi uzsvērt, tad vektora lieluma apzīmējumā pielieto vertikālas svītras |**a**|.



Zīmējums 1.1. Piemēri vektoru apzīmējumiem.

1.4. Vektoru saskaitīšana. Vektora A reizināšana ar skalāru.

(*Vector addition. Multiplication of* ***A*** *vector by A scalar*)

Vektoru saskaitīšanu veic pēc paralelograma likuma, saskaņā ar kuru divu vektoru summa ir tāda paralelograma diagonāle, kura malas veido šie vektori. Šis vektoru saskaitīšanas likums ir ekvivalents trīsstūra nosacījumam (*triangle rule*), kurš definē divu vektoru summu kā rezultējošo vektoru, kuru iegūst viena vektora galā (pie virziena bultiņas) pievienojot otro vektoru pēc tā virziena un lieluma. Grafiskais attēlojums divu vektoru **a** un **b** saskaitīšanai pēc paralelograma likuma ir parādīts zīm.1.2(a). Algebraiski saskaitīšanas process tiek izteikts ar vektoru vienādojumu:

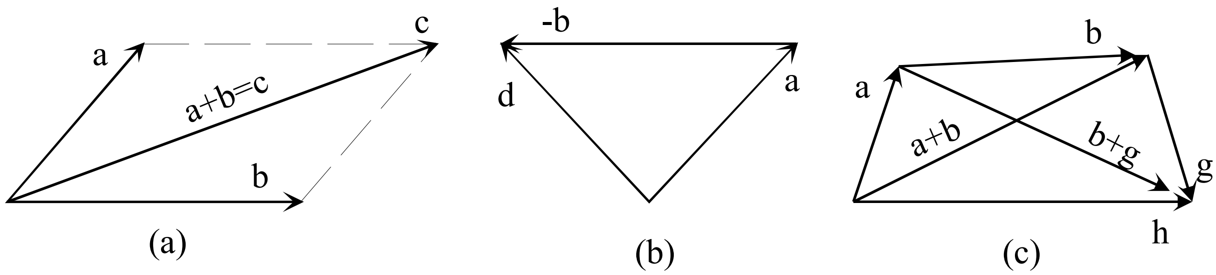
$$a+b=b+a=c \qquad (1.1)$$

Vektoru atņemšanu veic ar negatīva vektora pieskaitīšanu, zīm.1.2(b):

$$a-b=-b+a=d \qquad (1.2)$$

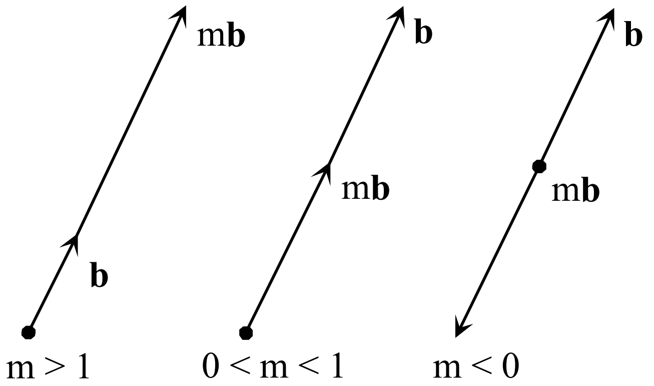
Vektoru saskaitīšanas un atņemšanas darbības ir komutatīvas un asociatīvas (*commutative and associative),* zīm.1.2(c), kuru atbilstošie vienādojumi ir:

$$(a+b)+g=a+(b+g)=h \qquad (1.3)$$



Zīmējums 1.2. Vektoru saskaitīšanas grafiskais attēlojums.

Vektoru reizinājums ar skalāru lielumu ir jauns vektors ar tādu pašu virzienu, bet atšķirīgu no sākotnējā garumu. Izņēmums ir reizināšana ar nulli, kad iegūst nulles vektoru, un reizināšana ar vienības vektoru, kurš nedod vektora izmaiņas. Trīs rezultātu varianti pie vektora **b** reizināšanas ar skalāru *m* ir parādīti zīm.1.3 atkarībā no *m* skaitliskās vērtības.



Zīmējums 1.3. Vektora reizināšana ar skalāru lielumu.

Vektora reizināšanas darbības ar skalāru ir asociatīvas un distributīvas (*associative and distributive*):

$$m(nb)=(mn)b=n(mb) \tag{1.4}$$

$$(m+n)b=(n+m)b=mb+nb \tag{1.5}$$

$$m(a+b)=m(b+a)=ma+mb \tag{1.6}$$

Svarīgs gadījums vektoru reizināšanā ir tā lieluma mijiedarbība, rezultātā iegūst vienības vektoru ar tādu pašu virzienu kā sākotnējam vektoram. Šī sakarība tiek izteikta ar vienādojumu:

$$\bar{b}={}^{b}\!/_{b} \quad \text{(Bold/Italic)} \tag{1.7}$$

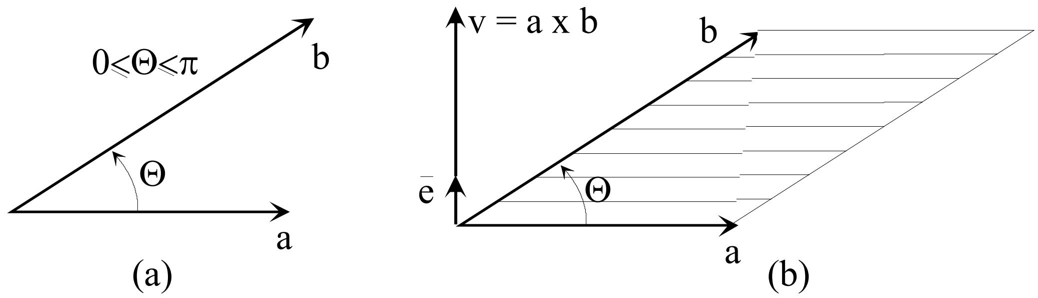
1.5. Vektoru krustošanās rezultāts.

(Dot and cross products of vektors)

Divu vektoru **a** un **b** reizinājums ir skalārs lielums (*dot or scalar product*):

$$\lambda=a\cdot b=b\cdot a=ab\cos\theta \tag{1.8}$$

Šeit θ ir šaurais leņķis starp diviem vektoriem, skat. zīm.1.4(a).



Zīmējums 1.4. Divu vektoru reizināšanas grafiskais attēlojums.

Divu vektoru **a** un **b** reizinājums ir jauns vektors **v**, kuru nosaka:

$$v = a \times b = -b \times a = (ab \sin\theta)\bar{e} \qquad (1.9)$$

Šeit θ ir leņķis starp **a** un **b**, mazāks par 180 grādiem, $\bar{e}$ ir vienības vektors, perpendikulārs plaknei, kuru veido **a** un **b** un virzīts pēc labās rokas likuma, griežot vektoru **a** uz **b** caur leņķi θ . Vektora **v** lielums ir paralelograma laukums, kuru veido vektori **a** un **b** kā malas, skat. zīm.1.4(b). Krustošanās rezultāts nav komutatīvs.

Trīskāršējs skalārs rezultāts *(scalar triple product)* ir rezultāts no diviem vektoriem, viens no kuriem jau ir krustošanās rezultāts (*cross product*):

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = a \cdot b \times c = \lambda \qquad (1.10)$$

Dažreiz šo rezultātu apzīmē [**abc**] un sauc par *box product*.

Lielums λ ir vienāds ar paralēlskaldņa tilpumu, kura malas veido vektori **a,b,c**. Trīskāršējs vektora rezultāts (*vector triple product*) ir divu vektoru krustošanās rezultāts, viens no kuriem jau ir krustošanās rezultāts. Sekojošais vienādojums ir bieži sastopamā izteiksme, kura parāda **a** un **b**$\times$ **c** krustošanās rezultātu:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c = w \qquad (1.11)$$

1.6. Diādes.
(Dyads and dyadics)

Nenoteikts (t.i. nedefinēts) vektoru **a** un **b** rezultāts (*indeterminate vector product of **a** and **b***), kuru raksta **ab**, tiek saukts par diādi. Šis rezultāts nav komutatīvs, t.i. $ab \neq ba$. Diādes pirmo vektoru sauc par priekšteci (jeb iepriekšējo, agrāko)(*antecedent*), otro par sekojošo (*consequent*). *Dyadic* **D** atbilst otrās pakāpes tenzoram un vienmēr sastāv no diādu galīgas summas:

$$D = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_N b_N \tag{1.12}$$

Simboliskos apzīmējumos *dyadics* tiek uzrādīts ar trekniem burtiem (*bold–faced sansserif).* Ja **D** izteiksmē (1.12) jebkurai diādei iepriekšējo un sekojošo vektoru apmaina vietām, tad tādu *diadics* sauc par lokāmu *dyadics (conjugate dyadics)* **D** un raksta:

$$D_c = b_1 a_1 + b_2 a_2 + ... + b_N a_N \tag{1.13}$$

Ja **D** izteiksmē (1.12) jebkuru diādi aizstāj ar divu vektoru reizinājumu rezultāta punktu (*dot product of the two vectors*), tad iegūst skalāru lielumu (*scalar of the dyadic **D***):

$$D_s = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_N \cdot b_N \tag{1.14}$$

Ja **D** izteiksmē (1.12) jebkuru diādi aizstāj ar divu vektoru krustošanās rezultātu (*the cross product of the two vectors*), tad iegūst vektoru (*vector of the dyadic **D***):

$$D_V = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + ... + a_N \times b_N \tag{1.15}$$

D_C, D_S, D_V ir neatkarīgi izteiksmes (1.12) varianti.

Neatkarīgu vektoru reizinājums atbilst distributātes likumam:

$$a(b+c) = ab + ac \tag{1.16}$$

$$(a+b)c = ac + bc \tag{1.17}$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \tag{1.18}$$

un ja λ un μ ir skalāri lielumi, tad:

$$(\lambda+\mu)ab=\lambda ab+\mu ab \tag{1.19}$$

$$(\lambda a)b=a(\lambda b)=\lambda ab \tag{1.20}$$

Ja **v** ir vektors, tad rezultāts **v** D un D **v** attiecīgi ir vektori:

$$v\cdot D=(v\cdot a_1)b_1+(v\cdot a_2)b_2+...+(v\cdot a_N)b_N=u \tag{1.21}$$

$$D\cdot v=a_1(b_1\cdot v)+a_2(b_2\cdot v)+...+a_N(b_2\cdot v)=w \tag{1.22}$$

Izteiksmē (1.21) D sauc par otro reizinātāju (jeb koeficientu) (*post factor*), izteiksmē (1.22) par pirmo reizinātāju (jeb koeficientu) (*prefactor*). Divi *dyadics* D un E ir vienādi, ja:

$$v\cdot D=v\cdot E \qquad \text{jeb} \qquad D\cdot v=E\cdot v \tag{1.23}$$

Vienības *dyadic (unit dyadic)* jeb *idemfactor* **I** ir *dyadic*, kuru raksta sekojoši:

$$I=\overline{e}_1\overline{e}_1+\overline{e}_2\overline{e}_2+\overline{e}_3\overline{e}_3 \tag{1.24}$$

šeit $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3$ sastāda trīs dimensiju Euklida telpas ortonormālo bāzi. *Dyadic* **I** raksturojas ar īpašību:

$$I\cdot v=v\cdot I=v \tag{1.25}$$

priekš visiem vektoriem **v**.

Pamatjēdzienu paskaidrojums.

a) skalāri lielumi raksturojas ar vienu noteicošu lielumu (piemēram, temperatūra, tilpums) ir nulles pakāpes tenzori, noteicošie lielumi (jeb bāzes elementi) ir $=3^0$;

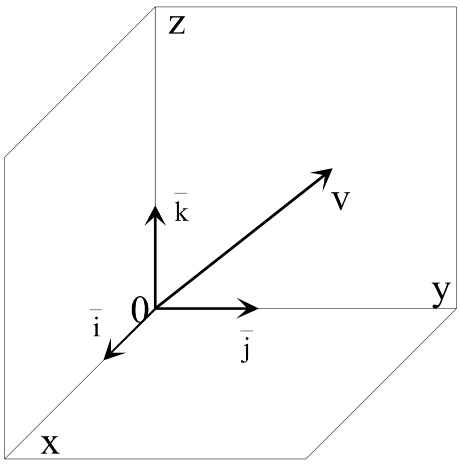
b) vektori raksturojas ar trīs noteicošiem lielumiem (piemēram, spēks, ātrums) ir pirmās pakāpes tenzori, noteicošie lielumi (jeb bāzes elementi) $=3^1$;

c) diādes raksturojas ar deviņiem noteicošiem lielumiem (piemēram, spriegumi, sašķobījumi) ir otrās pakāpes tenzori, noteicošie lielumi (jeb bāzes elementi) $=3^2$.

1.7. Koordināšu sistēmas. Bāzes vektori. Triādes vienības vektors.

(Coordinate systems. Base vectors. Unit vector triads).

Attiecībā pret izvēlēto koordināšu sistēmu vektors tiek noteikts ar vektora komponentēm šinī sistēmā. Koordināšu sistēmas izvēle ir patvaļīga. Norāde uz koordināšu sistēmas asīm dod vektora lieluma mērvienības un nosaka telpu, kurā ir noteikts vektora virziens. Taisnleņķa koordināšu sistēmā savstarpēji perpendikulārās asis ir 0xyz, skat. zīm.1.5.



Zīmējums 1.5. Vektors taisnleņķu koordināšu sistēmā.

Jebkurš vektors **v** šinī sistēmā tiek noteikts ar trīs, atšķirīgiem no nulles, vektoru kombināciju, šos vektorus sauc par pamatvektoriem (*base vectors*). Priekš pamatvektoriem **a,b,c** un vektoram **v** atbilstošiem skalāriem koeficientiem λ, μ, ν pastāv attiecība:

$$v = \lambda a + \mu b + \nu c \tag{1.26}$$

Bāzes vektori ir lineāri neatkarīgi, t.i. attiecība:

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0 \tag{1.27}$$

ja $\lambda=\mu=\nu=0$

Dotajā koordināšu sistēmā pamatvektori sastāda šīs sistēmas bāzi jeb pamatu.

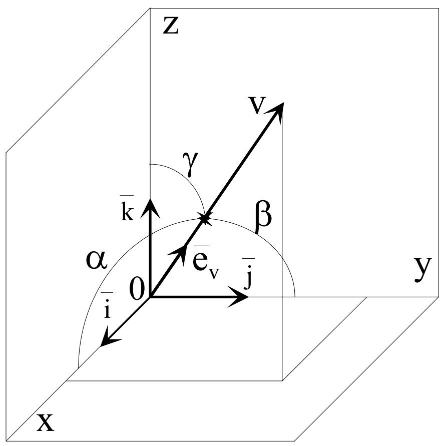
Bieži pamatvektoru izvēli nosaka ar vienības vektoriem $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ koordināšu asu virzienā, skat. zīm.1.5. Pamatvektori veido vienības vektoru triādi pēc labās rokas likuma (*constitute a right-handed unit vector triad*), priekš kuras ir spēkā sekojošas izteiksmes:

$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\quad \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i},\quad \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j} \tag{1.28}$$

un $\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$

$$\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0 \tag{1.29}$$

Visus šādus trīs vektorus kopā sauc par ortonormālo bāzi (*orthonormal basis*).



Zīmējums 1.6. Vektora attēlojums vienību triādes terminos.

Vienību triādes $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ terminos vektors **v** ir parādīts zīm.1.6:

$$v=v_x\bar{i}+v_y\bar{j}+v_z\bar{k} \tag{1.30}$$

šeit taisnleņķa koordināšu sistēmas komponentes ir:

$$v_x=v\cdot\bar{i}=v\cos\alpha$$

$$v_y = v\cdot\bar{j} = v\cos\beta$$

$$v_z = v\cdot\bar{k} = v\cos\gamma$$

Vienības vektors vektora **v** virzienā saskaņā ar (1.7) :

$$\bar{e}_v = \mathrm{v/v} = (\cos\alpha)\bar{i} + (\cos\beta)\bar{j} + (\cos\gamma)\bar{k} \qquad (1.31)$$

Tā kā **v** ir patvaļīgi izvēlēts, tam atbilstošajam vienas vienības vektoram ir virziena kosinuss (*direction cosines*) un komponentes taisnleņķa koordināšu sistēmā:

$$a\cdot b = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \qquad (1.32)$$

Šiem pašiem vektoriem **a** un **b** krustošanās rezultāts (*cross product*):

$$a\times b = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k} \qquad (1.33)$$

Rezultāts noteicēja formā (*the determinant form*):

$$a\times b = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.34)$$

Šeit elementi atbilst koordināšu numuriem. Trīskārtējs skalārs reizinājums (*triple scalar product)* komponenšu formā tiek izteikts ar noteicēju (*determinant*):

$$[abc] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (1.35)$$

taisnleņķa koordināšu sistēmas komponenšu formā diādi **ab** var rakstīt:

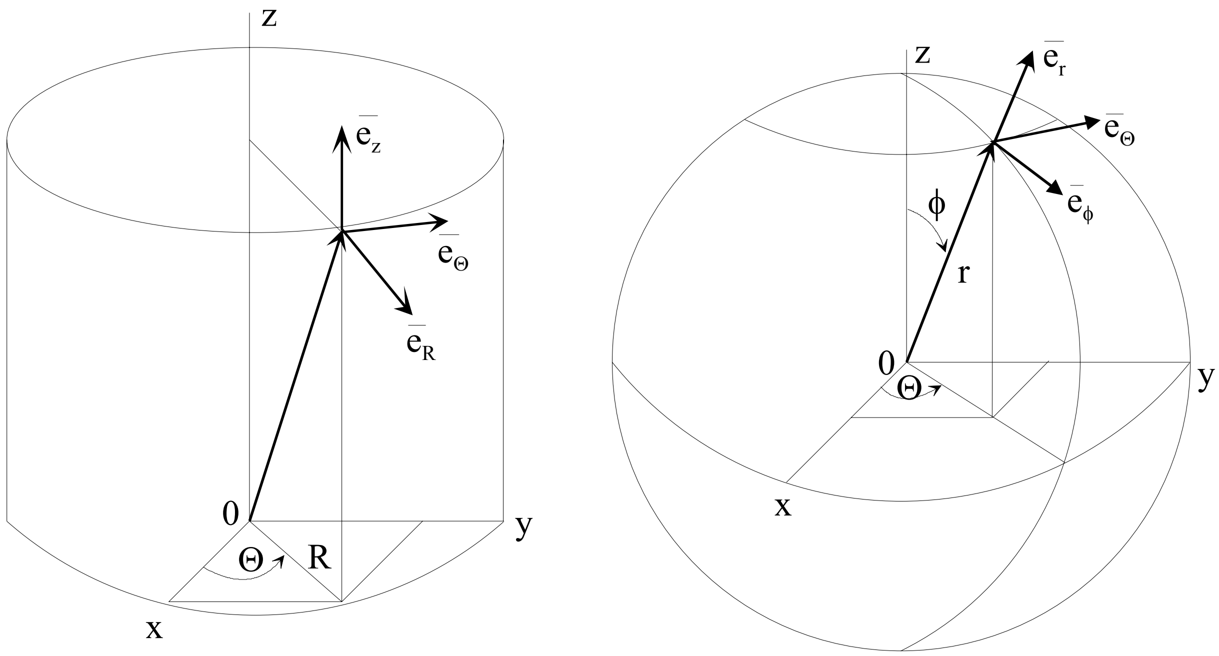
$$ab = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_x b_x\bar{i}\bar{i} + a_x b_y\bar{i}\bar{j} + a_x b_z\bar{i}\bar{k} +$$

$$+ a_y b_x\bar{j}\bar{i} + a_y b_y\bar{j}\bar{j} + a_y b_z\bar{j}\bar{k} + a_z b_x\bar{k}\bar{i} + a_z b_y\bar{k}\bar{j} + a_z b_z\bar{k}\bar{k} \qquad (1.36)$$

Tā kā ir ietverti deviņi saskaitāmie, izteiksmi (1.36) sauc par diādes **ab** *nonion form (the nonion form of the dyads* ***ab****).* Ir iespējams izteikt vienu diādi šinī formā. *The nonion form* triādes $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ vienībās:

$$\mathbf{I}=\bar{i}\,\bar{i}+\bar{j}\bar{j}+\bar{k}\bar{k} \tag{1.37}$$

Līklīniju koordināšu sistēmas (*curvilinear coordinate systems*) tādas kā cilindriskā (*cylindrical*) (R,θ,Z) un sfēriskā (*spherical*) (r,θ,ψ) sistēmas ir parādītas zīm.1.7.



(a) Cylindrical (b) Spherical

Zīmējums 1.7. Cilindriskā un sfēriskā koordināšu sistēmas.

Bāzes vektoru vienību triādes $(\bar{e}_R,\bar{e}_\theta,\bar{e}_Z)$ un $(\bar{e}_r,\bar{e}_\theta,\bar{e}_\psi)$ zīmējumos parādītas kā apvienotas ar šīm sistēmām. Tomēr pamatvektoriem šeit nav noteikts virziens un tādēļ tie parasti ir novietojuma jeb pozicijas funkcija.

1.8. Koordināšu transformācija. Galvenais tenzors.

(Coordinate transformations. General tensors).

Pieņemam, ka x^i pārstāv patvaļīgu sistēmu ar koordinātēm x^1, x^2, x^3 trīsdimensiju Euklida telpā, bet Θ^i pārstāv citu koordināšu sistēmu $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ tanī pašā telpā. Šeit augšējie indeksi nav pakāpes rādītāji, bet "etiķetes" (*labels*). Koordināšu transformācijas vienādojums:

$$\Theta^i = \Theta^i\left(x^1, x^2, x^3\right) \tag{1.38}$$

t.i. dots punkts x^i - sistēmā ar koordinātēm $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ un jānosaka šī paša punkta koordinātes $\left(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3\right)$ citā sistēmā Θ^i .

Funkcija Θ^i attiecībā uz mainīgiem (t.i. koordinātēm) ir nepārtraukta, viennozīmīga, diferencējama funkcija.

Determinantu

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Theta^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial\Theta^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial\Theta^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial\Theta^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial\Theta^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial\Theta^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial\Theta^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial\Theta^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial\Theta^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \tag{1.39}$$

jeb kompaktā formā

$$J = \left|\frac{\partial\Theta^i}{\partial x^j}\right| \tag{1.40}$$